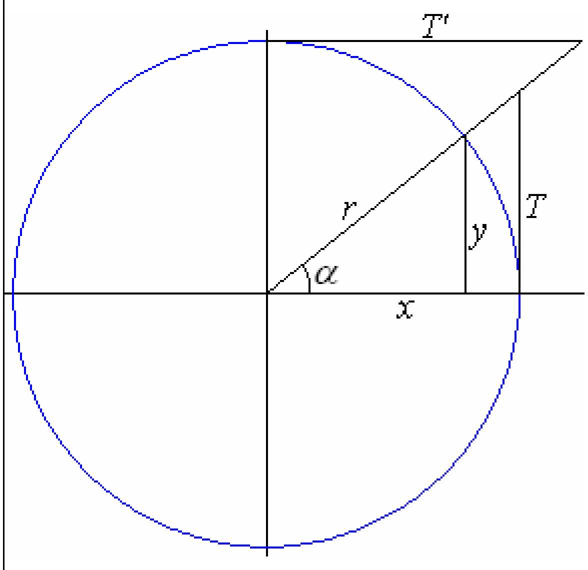
Julián Moreno Mestre www.juliweb.es tlf. 629381836

Trigonometría



Definiciones de algunas funciones trigonométricas

$$y = r\sin(\alpha) \leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{y}{r} \equiv \frac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{Hipotenusa}}$$

$$x = r\cos(\alpha) \leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{x}{r} = \frac{\textit{Cateto adyacente}}{\textit{Hipotenusa}}$$

$$T = r\tan(\alpha) = r\frac{y}{x} \equiv \frac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{Cateto adyacente}} \leftrightarrow \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$T' = r\,\mathrm{cotan}(\alpha) = \frac{x}{y} \equiv \frac{\textit{Cateto adyacente}}{\textit{Cateto opuesto}} \leftrightarrow \mathrm{cotan}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$\sec(\alpha) = \frac{r}{x} \equiv \frac{\textit{Hipotenusa}}{\textit{Cateto adyacente}} \leftrightarrow \sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

$$\mathrm{cosec}(\alpha) = \frac{r}{y} \equiv \frac{\textit{Hipotenusa}}{\textit{Cateto opuesto}} \leftrightarrow \mathrm{cosec}(a) = \frac{1}{\sin(a)}$$

Formulas importantes de la trigonometría

$\sin(-a) = -\sin(a)$	$\cos(-a) = \cos(a)$	$\tan(-a) = -\tan(a)$
$\sin(90 \mp a) = \cos(a)$	$\cos(90 \pm a) = \mp\sin(a)$	$\tan(90 \pm a) = \frac{\mp 1}{\tan(a)}$

Formula fundamental de la trigonometría:

$$\boxed{\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1}$$

Fórmulas de ángulo doble y ángulo mitad.

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$	$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$	$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

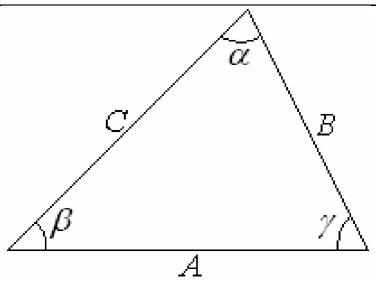
$\tan\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{1+\cos(a)}}$	$\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{2}}$	+ Si $a/2$ esta en el primer o tercer cuadrante. – Si $a/2$ esta en el segundo o cuarto cuadrante.

$\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(a)}{2}}$	+ Si $a/2$ esta en el primer o segundo cuadrante. – Si $a/2$ esta en el tercer o cuarto cuadrante.

Fórmulas de adicción de ángulos.

$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$ $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$	$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a)\tan(b)}$
$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$ $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big)$ $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\sin(a-b) + \sin(a+b)\big)$	$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ $\cos(a) - \cos(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$ $\sin(a) \pm \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a \pm b}{2}\right)\cos\left(\frac{a \mp b}{2}\right)$

Aplicaciones a triángulos



$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$

Teorema del coseno (Teorema de Pitágoras)	$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos(\alpha)$ $B^2 = A^2 + C^2 - 2CA\cos(\beta)$ $C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos(\gamma)$
Teorema del seno:	$\frac{A}{\sin(\alpha)} = \frac{B}{\sin(\beta)} = \frac{C}{\sin(\gamma)}$
Teorema del área:	$Area = \frac{AB\sin\gamma}{2} = \frac{BC\sin\alpha}{2} = \frac{CA\sin\beta}{2}$

Julián Moreno Mestre www.juliweb.es tlf. 629381836

Valores de algunas de las funciones trigonométricas más importantes con algunos ángulos:

Grados	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º
Radianes	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2
$\sin\alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	–1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	–1	0
$\tan\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$

Logaritmos

$\log_a a = 1$	$\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$	$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
$\log_a x^y = y\log_a x$	$\log_a \sqrt[y]{x} = \dfrac{\log_a x}{y}$	$\log_a x = \dfrac{\log_y x}{\log_y a}$

$\log_{10} A = \log A \equiv$	Logaritmo decimal (En libros de carrera $\log A$ deja de significar logaritmo en base 10).		
$\log_e A = \ln(A) \equiv$	Logaritmo neperiano o logaritmo natural. (En libros de carrera $\log A$ es neperiano).		
$\log_2 A \equiv$	Logaritmo binario.	$\mathrm{colog}_a A = -\log_a A \equiv$	Cologaritmo.
$\mathrm{antilog}_a A = a^A \equiv$	Antilogaritmo, es la función inversa de la función logaritmo. También conocida como función exponente.		

Números complejos: $z = x + yi$

Complejo conjugado $\bar{z} = \overline{x+iy} = x - iy$ Modulo $\lvert z\rvert = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$	Argumento $\theta = Arg(z) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) = \begin{cases} \theta_{\text{calculadora}} & x>0 \\ 90^\circ & x=0 \ \ y>0 \\ -90^\circ & x=0 \ \ y<0 \\ \theta_{\text{calculadora}}+180^\circ & x<0 \end{cases}$	
Formas de representar números complejos:	Forma binómica: $x+yi$	Forma polar y trigonométrica $r_\theta = r[\cos\theta + i\sin\theta]$
	Forma cartesiana (x,y)	Forma exponencial $e^{\ln r + i\theta} = re^{i\theta}$
Operaciones con complejos: $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1e^{i\theta_1}$ $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2e^{i\theta_2}$	Suma y resta de complejos: $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$	
	Multiplicación de complejos: $z_1z_2 = \begin{cases} x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_2y_1 + x_1y_2) \\ r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{cases}$	
	División de complejos: $\dfrac{z_1}{z_2} = \begin{cases} \dfrac{z_1}{z_2}\dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \dfrac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}\cdot\dfrac{x_2-y_2i}{x_2-y_2i} = \dfrac{(x_1+y_1i)(x_2-y_2i)}{x_2^2+y_2^2} \\ \dfrac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{cases}$	
Potencias de números complejos:	Potencia enésima entera de un número complejo: (Recomendado usar la forma exponencial y trigonométrica) $z^n = \begin{cases} (re^{i\theta})^n = r^ne^{in\theta} \\ (r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)])^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] \end{cases}$ Formula de Moivre	
	Raíz enésima de un número complejo: (Posee n soluciones $k \in (0,1,2,\ldots,n-1)$) $z^n = \begin{cases} \sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\theta+k\cdot 360)}{n}} \\ \sqrt[n]{r[\cos(\theta)+i\sin(\theta)]} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\dfrac{\theta+k\cdot 360}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta+k\cdot 360}{n}\right)\right] \end{cases}$	

Parte real de un numero complejo $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2} = x$ Parte imaginaria de un número complejo $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} = y$	Algunas Igualdades trigonométricas: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin(\theta) = \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$