Julián Moreno Mestre. www.juliweb.es tlf. 629381836

Tabla de derivadas

Función	Derivada de la función	Función	Derivada de la función
$y = k$	$y' = 0$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = x$	$y' = 1$	$y = e^u$	$y' = u'e^u$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = \sin(u)$	$y' = u'\cos(u)$
$y = au^n$	$y' = anu'(u)^{n-1}$	$y = \cos(u)$	$y' = -u'\sin(u)$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = \tan(u)$	$y' = u'\sec^2(u)$
$y = uv$	$y' = u'v + uv'$	$y = \cot(u)$	$y' = u'\csc^2(u)$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \csc(u)$	$y' = -u'\csc(u)\cot g(u)$
		$y = \sec(u)$	$y' = u'\sec(u)\tan(u)$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$y = \arcsin(u)$ $-\pi/2 < \arcsin(u) < \pi/2$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \ln(u)$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$y = \arccos(u)$ $0 < \arccos(u) < \pi$	$y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \log_a(u)$	$y' = \dfrac{u'}{u}\log_a(e)$	$y = \arctan(u)$ $-\pi/2 < \arctan(u) < \pi/2$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
$y = u^v$	$y' = (v'\ln u)u^v + vu^{v-1}u'$	(Regla de la cadena) $y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Propiedades de las integrales

$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$	$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Tabla de Integrales

$\int dx = x + k$	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\int \dfrac{u'}{u}dx = \ln\lvert u\rvert + k$	$\int u'e^u dx = e^u + k$	$\int u'\sin u\, dx = \cos u + k$
$\int u'\cos u dx = -\sin u + k$	$\int u'\tan u dx = -\ln\lvert\cos u\rvert + k$	$\int u'\mathrm{cotg} u dx = \ln\lvert\sin u\rvert + k$	$\int \dfrac{u'}{\cos u}dx = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + k$	
$\int \dfrac{u'}{\sin u}dx = -\ln\lvert\mathrm{cosec}\, u + \mathrm{cotg}\, u\rvert + k$	$\int \dfrac{u'}{\cos^2 u}dx = \tan u + k$	$\int \dfrac{u'}{\sin^2 u}dx = -\mathrm{cotg}\, u + k$		
$\int \dfrac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}dx = \mathrm{arcsen}\dfrac{u}{a} + k$	$\int \dfrac{u'}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}dx = \ln\left(\sqrt{u^2 \pm a^2} + u\right) + k$	$\int \dfrac{u'}{u^2+a^2}dx = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{u}{a} + k$		

<u>Primer teorema fundamental del Calculo:</u>

f integrable en $[a,b] \Rightarrow F$ continua en $[a,b]$. Si f es continua en un $c \in (a,b)$ entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$

<u>Segundo teorema fundamental del Calculo:</u>

Si f es continua en $[a,b]$ y $f = F'$ para alguna función F entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = [F(x)]_a^b$

<u>Teorema de integración por partes:</u>

Sean $f, g : [a,b] \to \Re$ dos funciones derivables, entonces $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Formula habitual de integración por partes: $\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$ (Sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme)

<u>Teorema del cambio de variables:</u>

Sea g una función con derivada g' continua en $[a,b]$, y sea $f : g([a,b]) \to \Re$ continua. Entonces, haciendo el cambio de variable $t = g(x)$, resulta: $\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt}$

<u>Condiciones de continuidad en $x = x_0$:</u>

1ª) $\exists f(x_0)$

2ª) $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

3ª) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

<u>Condición de derivabilidad en $x = x_0$:</u>

1ª) Ser continua en $x = x_0$

2ª) $\exists \lim_{x\to x_0} f'(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$

Teorema. Propiedades de la continuidad:

Si k es un número real y f, g son continuas en $x \in [a,b]$, entonces las siguientes funciones:

1º kf es continuas en $[a,b]$ 2º $f \pm g$ es continuas en $[a,b]$ 3º $f \cdot g = g \cdot f$ es continua en $[a,b]$

4º $f \circ g$ y $g \circ f$ es continua en $[a,b]$ 5º f / g siempre que $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Teorema. Derivabilidad y continuidad:

Si una función f es derivable en un punto a, entonces es continua en a.

Esquema de representación de funciones

<table>
<tr><td>1º Dominio de una función</td><td colspan="3">Busca puntos en los que la función no exista o haya singularidades.</td></tr>
<tr><td>2º Puntos de corte con los ejes</td><td colspan="2">Eje x aplicar: $f(x)=0$</td><td>Eje y aplicar: $f(0)$</td></tr>
<tr><td>3º Simetrías</td><td colspan="2">$Par \Leftrightarrow f(-x) = f(x)$ Simétrica eje y</td><td>$\text{Impar} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ Simétrica origen</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4º Asíntotas</td><td>Horizontal</td><td colspan="2">Si hay asintota horizontal no hay asintota oblicua, salvo funciones definidas a trozos.
$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = c$</td></tr>
<tr><td>Vertical</td><td colspan="2">Usa las singularidades entorno a $x=a$ que aparecen en el dominio. Si se verifica que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ entonces es asíntota vertical.</td></tr>
<tr><td>Oblicua</td><td colspan="2">Se busca una recta: $y = mx+n$ Donde: $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$; $n = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx$</td></tr>
<tr><td>5º Crecimiento y decrecimiento (Máximos y mínimos)</td><td colspan="3">1º) Calcular la primera derivada $f'(x)$.
2º) Buscar puntos candidatos Igualar $f'(x)=0$.
3º) Tabla de signos y tener en cuenta que:
$f'(x) > 0 \Rightarrow \text{creciente}$
$f'(x) < 0 \Rightarrow \text{decreciente}$
Máximo punto en el que la función pasa de ser creciente a ser decreciente.
Mínimo punto en el que la función pasa de ser decreciente a ser creciente.</td></tr>
<tr><td>6º Concavidad y convexidad (puntos de inflexión)</td><td colspan="3">$f(x) > 0$ Convexa — $f(x) < 0$ Cóncava
Punto de inflexión es en el que la función pasa de ser cóncava a convexa y viceversa.</td></tr>
<tr><td>7º Periodicidad</td><td colspan="3">Son las funciones que cumplen $f(x+T) = f(x)$, que son las trigonométricas.</td></tr>
</table>

Teorema de Bolzano:

Si f es continua en $[a,b]$ y se verifica que $a<b$ y que $f(a)f(b)<0$ entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$

Teorema del valor medio de Lagrange:

Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b), existe un número c tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Teorema de Darboux:

Si f es continua en $[a,b]$, entonces f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

Teorema de Rolle:

Si f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$ entonces existe al menos un número $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=0$

Teorema de Weierstrass:

Sea f una función continua en un conjunto $A \in \Re$ compacto (conjunto cerrado y acotado). Entonces f alcanza máximo y mínimo en A. Es decir, existen $a,b \in A$ tales que $\begin{cases} f(a) \geq f(x) & \forall x \in A \\ f(b) \leq f(x) & \forall x \in A \end{cases}$

Aproximaciones pequeñas en límites:

Estas aproximaciones solo son válidas cuando el valor de x es muy pequeño y próximo a cero.

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \qquad \tan x \approx x + \frac{x^3}{3} \qquad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} \qquad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

$$a^x \approx 1 + x\ln a + \frac{(x\ln a)^2}{2} \qquad \arcsin x \approx x + \frac{x^3}{6} \qquad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \qquad \arccos x \approx \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6}$$

Definición de de derivadas por limites:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \qquad \boxed{f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Calculo de la recta tangente en $x = x_0$ de una función $f(x)$: $y - y_0 = m(x-x_0) \to y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

Calculo de la recta normal en $x = x_0$ de una función $f(x)$: $y - y_0 = m^{\perp}(x-x_0) \to y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$