



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

PRUEBAS DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)

MODELO DE EXAMEN (Curso 2002-2003)

MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

### INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

**INSTRUCCIONES:** El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir **UNA Y SOLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

**PUNTUACIÓN:** La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

**Tiempo:** 90 minutos.

#### OPCIÓN A

**Ejercicio 1.** (Puntuación máxima: 2 puntos.) Determinar los valores de las constantes A, B, C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real

$$f(x) = A \operatorname{sen} x + Bx^2 + Cx + D$$

tiene tangente horizontal en el punto (0, 4) y además su derivada segunda es  $f''(x) = 3 \operatorname{sen} x - 10$ .

**Ejercicio 2.** (Puntuación máxima: 2 puntos.) Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6} dx$$

**Ejercicio 3.** (Puntuación máxima: 3 puntos.) Sea  $M$  una matriz real cuadrada de orden  $n$  que verifica la identidad  $M^2 - 2M = 3I$ , donde  $I$  denota la matriz identidad de orden  $n$ . Se pide:

- (1 punto) Estudiar si existe la matriz inversa de  $M$ . En caso afirmativo, expresar  $M^{-1}$  en términos de  $M$  e  $I$ .
- (1 punto) Expresar  $M^3$  como combinación lineal de  $M$  e  $I$ .
- (1 punto) Hallar todas las matrices de la forma  $M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$  que verifican la identidad del enunciado.

**Ejercicio 4.** (Puntuación máxima: 3 puntos.) Se consideran el plano  $\pi$  y la recta  $r$  siguientes.

$$\pi : x + y - 2z = 6 \quad ; \quad r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

Se pide:

- (1,5 puntos) Hallar el punto simétrico de  $M(1, 1, 1)$  respecto del plano  $\pi$ .
- (1,5 puntos) Hallar el punto simétrico de  $M(1, 1, 1)$  respecto de la recta  $r$ .

## OPCIÓN B

**Ejercicio 1.** (Puntuación máxima: 2 puntos.) Hallar todas las matrices  $X$  tales que  $XA = AX$ , siendo  $A$  la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 2.** (Puntuación máxima: 2 puntos.) Para cada valor del parámetro real  $k$ , se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k^2 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores de  $k$ .
- b) (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

**Ejercicio 3.** (Puntuación máxima: 3 puntos.) Se consideran los puntos:

$$A(1, 1, 1); B(0, -2, 2); C(-1, 0, 2); D(2, -1, -2).$$

Se pide:

- a) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro de vértices  $A, B, C$  y  $D$ .
- b) (1 punto) Calcular la distancia del punto  $D$  al plano determinado por los puntos  $A, B$  y  $C$ .
- c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por  $D$  y es perpendicular al plano determinado por los puntos  $A, B$  y  $C$ .

**Ejercicio 4.** (Puntuación máxima: 3 puntos.) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$$

Se pide:

- a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
- b) (0,5 puntos) Hallar los puntos donde la gráfica de  $f$  tiene tangente vertical.
- c) (0,5 puntos) Representar gráficamente la función.
- d) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje  $OX$  y las rectas  $x = -1$ ,  $x = 1$ .

Nota.- Para obtener las asíntotas puede ser de utilidad la igualdad:

$$A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$$

## CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

**ATENCIÓN.-** La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos.

### OPCIÓN A

**Ejercicio 1.**— Planteamiento correcto: 1 punto.

Resolución correcta: 1 punto.

**Ejercicio 2.**— Descomposición en fracciones simples: 1 punto.- Cálculo de la integral: 1 punto.

**Ejercicio 3.**— a) 1 punto.- b) 1 punto.- c) 1 punto.

**Ejercicio 4.**— a) 1,5 puntos.- b) 1,5 puntos.

### OPCIÓN B

**Ejercicio 1.**— Planteamiento correcto: 1 punto.

Resolución correcta: 1 punto.

**Ejercicio 2.**— a) 1 punto.- b) 0,5 puntos por cada caso resuelto correctamente.

**Ejercicio 3.**— a) 1 punto.- b) 1 punto.- c) 1 punto.

**Ejercicio 4.**— a) Obtención del máximo: 0,5 puntos.- Asíntota: 0,5 puntos.- b) 0,5 puntos.- c) 0,5 puntos.-  
d) Planteamiento como una integral: 0,25 puntos.- Cálculo correcto de la integral: 0,75 puntos.

### NOTA

La resolución de ejercicios por cualquier procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

**Principales conceptos que se tendrán en cuenta en la elaboración  
de las pruebas de Acceso a la Universidad  
para los estudiantes provenientes de Bachillerato LOGSE  
de la materia "Matemáticas II"**

### **ÁLGEBRA LINEAL**

- Utilización de matrices como herramientas para representar datos estructurados en tablas y grafos. Traspuesta de una matriz. Suma de matrices. Producto de un número real por una matriz. Producto de matrices. Potencia de una matriz cuadrada. Propiedades de las operaciones con matrices.: *(No se exigirá la demostración de las propiedades; el estudiante debe saber realizar adecuadamente manipulaciones algebraicas con matrices).*
- Determinante de una matriz cuadrada. Propiedades de los determinantes. Usar las propiedades para calcular determinantes. *(No se exigirá la demostración de las propiedades. No se pedirá calcular determinantes de matrices de orden superior a cuatro.)*
- Matriz singular. Matriz invertible. Cálculo de la inversa de una matriz cuadrada de orden no superior a tres. Estudio de la inversa de una matriz que depende como máximo de un parámetro. Ecuaciones matriciales.
- Rango de una matriz. Estudio del rango de una matriz que depende como máximo de un parámetro.
- Sistemas de ecuaciones lineales. Notación matricial. Resolución de sistemas compatibles. Discusión de las soluciones de sistemas lineales dependientes de un parámetro. Sistemas homogéneos. *(Los sistemas lineales tendrán como máximo cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas y dependerán a lo sumo de un parámetro.)*
- Planteamiento de problemas cuya solución puede obtenerse resolviendo un sistema de, como máximo, tres ecuaciones con tres incógnitas

### **ANÁLISIS:**

- Límite de una función en un punto. Límites laterales. Cálculo de límites. Indeterminaciones sencillas. Infinitésimos equivalentes. Ramas infinitas.
- Continuidad de funciones. Operaciones con funciones continuas. Teorema de los valores intermedios. Teorema de acotación en intervalos cerrados.
- Tasa de variación. Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. Derivadas laterales. Relación con la continuidad. Función derivada. Reglas de derivación, incluyendo la derivación logarítmica, la de composición. de funciones y la de las funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente.

- Monotonía y convexidad de funciones. Determinación de los puntos notables de funciones. Representación gráfica de funciones.
- Resolución de problemas de optimización.
- Conocimiento y aplicación de los resultados del teorema de Rolle, el teorema del valor medio y la regla de L'Hôpital.
- Primitiva e integral indefinida de una función. Cálculo de primitivas inmediatas, por partes, por cambios de variable simples y de funciones racionales con denominador de grado no mayor que dos.
- Integral definida. Regla de Barrow. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.

## GEOMETRÍA

- Vectores en el plano y en el espacio. Operaciones con vectores. Dependencia e independencia lineal. Bases. Coordenadas.
- Producto escalar de vectores. Vectores unitarios, ortogonales y ortonormales.
- Módulo de un vector. Ángulo entre dos vectores. Proyección de un vector sobre otro.
- Producto vectorial: definición, propiedades e interpretación geométrica. Producto mixto de tres vectores: definición e interpretación geométrica.
- Ecuaciones de rectas en el espacio. Ecuaciones de planos. Posición relativa de puntos, rectas y planos en el espacio. Distancia entre puntos, rectas y planos. Haces de planos. Perpendicular común a dos rectas que se cruzan. Ángulos entre rectas y planos.
- Áreas de paralelogramos y triángulos. Volúmenes de prismas y tetraedros.
- Concepto de lugar geométrico. Las cónicas como lugares geométricos. Estudio particular de la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola, con todos sus elementos, en el caso de ejes paralelos a los ejes coordenados. Tangentes a las cónicas. Ecuaciones paramétricas de la circunferencia y de la elipse.