



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
PRUEBAS DE ACCESO A LOS ESTUDIOS UNIVERSITARIOS DE LOS
ALUMNOS DE BACHILLERATO LOGSE

MODELO
AÑO 2001

AÑO 2001

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Principales conceptos que se tendrán en cuenta en la elaboración de las pruebas de Acceso a la Universidad para los estudiantes provenientes del Bachillerato LOGSE de la materia "Matemáticas II"

ÁLGEBRA LINEAL

- Utilización de matrices como herramientas para representar datos estructurados en tablas y grafos. Traspuesta de una matriz. Suma de matrices. Producto de un número real por una matriz. Producto de matrices. Potencia de una matriz cuadrada. Propiedades de las operaciones con matrices. *(No se exigirá la demostración de las propiedades; el estudiante debe saber realizar adecuadamente manipulaciones algebraicas con matrices.)*
- Determinante de una matriz cuadrada. Propiedades de los determinantes. Usar las propiedades para calcular determinantes. *(No se exigirá la demostración de las propiedades. No se pedirá calcular determinantes de matrices de orden superior a cuatro.)*
- Matriz singular. Matriz invertible. Cálculo de la inversa de una matriz cuadrada de orden no superior a tres. Estudio de la inversa de una matriz que depende como máximo de un parámetro. Ecuaciones matriciales.
- Rango de una matriz. Estudio del rango de una matriz que depende como máximo de un parámetro.
- Sistemas de ecuaciones lineales. Notación matricial. Resolución de sistemas compatibles. Discusión de las soluciones de sistemas lineales dependientes de un parámetro. Sistemas homogéneos. *(Los sistemas lineales tendrán como máximo cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas y dependerán a lo sumo de un parámetro).*
- Planteamiento de problemas cuya solución puede obtenerse resolviendo un sistema de, como máximo, tres ecuaciones con tres incógnitas.

ANÁLISIS

- Límite de una función en un punto. Límites laterales. Cálculo de límites. Indeterminaciones sencillas. Infinitésimos equivalentes. Ramas infinitas.
- Continuidad de funciones. Operaciones con funciones continuas. Teorema de los valores intermedios. Teorema de acotación en intervalos cerrados.
- Tasa de variación. Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. Derivadas laterales. Relación con la continuidad. Función derivada. Reglas de derivación, incluyendo la derivación logarítmica, la de composición de funciones y la de las funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente.
- Monotonía y convexidad de funciones. Determinación de los puntos notables de funciones. Representación gráfica de funciones.
- Resolución de problemas de optimización.
- Conocimiento y aplicación de los resultados del teorema de Rolle, el teorema del valor medio y la regla de L'Hôpital.
- Primitiva e integral indefinida de una función. Cálculo de primitivas inmediatas, por partes, por cambios de variables simples y de funciones racionales con denominador de grado no mayor que dos.
- Integral definida. Regla de Barrow. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
PRUEBAS DE ACCESO A LOS ESTUDIOS UNIVERSITARIOS DE LOS
ALUMNOS DE BACHILLERATO LOGSE

MODELO
AÑO 2001

AÑO **2001**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

GEOMETRÍA

- Vectores en el plano y en el espacio. Operaciones con vectores. Dependencia e independencia lineal. Bases. Coordenadas.
- Producto escalar de vectores. Vectores unitarios, ortogonales y ortonormales. Módulo de un vector. Ángulo entre dos vectores. Proyección de un vector sobre otro.
- Producto vectorial: definición, propiedades e interpretación geométrica. Producto mixto de tres vectores: definición e interpretación geométrica.
- Ecuaciones de rectas en el espacio. Ecuaciones de planos. Posición relativa de puntos, rectas y planos en el espacio. Distancia entre puntos, rectas y planos. Haces de planos. Perpendicular común a dos rectas que se cruzan. Ángulos entre rectas y planos.
- Áreas de paralelogramos y triángulos. Volúmenes de prismas y tetraedros.
- Concepto de lugar geométrico. Las cónicas como lugares geométricos. Estudio particular de la circunferencia, la elipse, la hipérbola, y la parábola, con todos sus elementos, en el caso de ejes paralelos a los ejes coordenados. Tangentes a las cónicas. Ecuaciones paramétricas de la circunferencia y de la elipse.

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

TIEMPO: Hora y media.

INSTRUCCIONES: El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

PUNTUACIÓN: Calificación total máxima: 10 puntos. La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.



OPCIÓN A

Ejercicio 1: (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se considera una varilla AB de longitud 1. El extremo A de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$;

la varilla se mantiene en todo momento tangente a dicha circunferencia.

- (1 punto) Determinar el lugar geométrico descrito por el extremo B de la varilla.
- (1 punto) Obtener la ecuación cartesiana de dicho lugar geométrico.

Ejercicio 2: (Puntuación máxima 2 puntos)

Sean las rectas:

$$r: \begin{cases} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x \\ 2 \end{cases} = \begin{cases} y - 1 \\ a \end{cases} = z$$

- (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s según los valores de a.
- (1 punto) Calcular la distancia entre las rectas r y s cuando $a = -2$;

Ejercicio 3: (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + 2A = I$, donde I denota matriz identidad.

- (1 punto) Demostrar que A es no singular ($\det(A)$ distinto de 0) y expresar A^{-1} en función de A e I.
- (1 punto) Calcular dos números p y q tales que $A^3 = pI + qA$.
- (1 punto) Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

cumple la relación de partida, calcular el valor de k.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la parábola $y = 4 - x^2$, se considera el triángulo rectángulo T(r) formado por los ejes de las coordenadas y la tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = r > 0$.

- (2 puntos) Hallar r para que T(r) tenga área mínima.
- (1 punto) Calcular el área de la región delimitada por la parábola, su tangente en el punto de abscisa $x = 1$, y el eje vertical.



OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto) calcular A^{-1} .
b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real λ definimos la matriz $B = A - \lambda I$, donde I denota matriz identidad 2×2 .

- a) (0,5 puntos) Hallar los valores de λ que hacen que el determinante de B sea nulo.
b) (1,5 puntos) Resolver el sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ para los diferentes valores de } \lambda.$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

- a) (1 punto) Hallar su centro y su radio y dibujarla.
b) (1 punto) Hallar el punto de la curva, de abscisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.
c) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(3,0)$ razonando la respuesta.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función $f(x) = xe^{3x}$.

- a) (1,5 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f .
b) (1,5 puntos) Sabiendo que el área e la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre $x=0$ y $x=p$ ($p>0$) vale $1/9$, calcular el valor de p .



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
PRUEBAS DE ACCESO A LOS ESTUDIOS UNIVERSITARIOS DE LOS
ALUMNOS DE BACHILLERATO LOGSE

MODELO
AÑO 2001

AÑO **2001**
MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

- 1.- En el apartado a), 0,5 puntos por razonar que se trata de una circunferencia y 0,5 puntos por concluir que es concéntrica con la circunferencia dada. En el apartado b) 0,25 por el radio y 0,75 por la ecuación.
- 2.- En el apartado a), 0,25 puntos por el planteamiento, 0,25 por determinar correctamente el valor clave de a y 0,5 por la interpretación geométrica. En el apartado b), 0,5 puntos por el planteamiento y 0,5 por el valor correcto de la distancia.
- 3.- En el apartado a), 0,5 puntos por razonar que el determinante es no nulo y 0,5 puntos por la obtención de la inversa. En los apartados b) y c), 0,5 por el planteamiento y 0,5 por obtener los valores solicitados.
- 4.- En el apartado a), 1 punto por la fórmula del área y 1 por la resolución. En el apartado b), 0,5 puntos por el planteamiento y 0,5 por el valor correcto de la integral.

OPCIÓN B

- 1.- En el apartado a), 0,5 puntos por un planteamiento correcto y 0,5 por el cálculo. En el apartado b), 0,25 por despejar X y 0,75 por el cálculo correcto.
- 2.- En el apartado b), 0,5 puntos por cada uno de los tres casos que pueden presentarse.
- 3.- En el apartado a), 0,5 puntos por el centro y el radio y 0,5 por el dibujo. En el apartado b), 0,5 por hallar el punto solicitado y 0,5 por la ecuación de la tangente. En el apartado c), 0,5 por cada tangente que se haya obtenido razonadamente.
- 4.- En el apartado a), 1 punto por el estudio correcto y 0,5 por la gráfica. En el apartado b), 0,5 puntos por el planteamiento de la integral, 0,25 por la primitiva y 0,75 por el valor correcto de p .