UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS
Curso **2006–2007**
MATERIA: MATEMÁTICAS

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El alumno contestará a los cinco ejercicios de una de las dos opciones que se le ofrecen (A o B) y sólo a una, e indicará en el encabezamiento la opción elegida. Debe dar respuestas concisas y justificar los argumentos empleados.
Valoración: Cada ejercicio se puntuará con un máximo de 2 puntos. En los ejercicios con dos apartados cada uno de ellos se valorará sobre 1 punto.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1 Se considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & -x & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular para qué valores de x existe la matriz inversa M^{-1}.
b) Calcular la inversa, si existe, para $x = 0$.

Ejercicio 2 Dados la recta $r \equiv \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ y el punto $A(1,2,-1)$, hallar la ecuación del plano que es paralelo a r y pasa por A y por el origen de coordenadas.

Ejercicio 3 Calcular el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+5}{x-2}\right)^{3x}$.

Ejercicio 4 Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-8x+15}\,dx$.

Ejercicio 5 Se tienen dos urnas, una urna A con 2 bolas rojas y 18 bolas negras, y una urna B con 8 bolas rojas y 1 bola negra. Se extrae una bola de la urna A y se introduce en la urna B. Seguidamente se extrae una bola de la urna B.

a) Calcular la probabilidad de que la bola extraída sea de color rojo.
b) Comprobar si la probabilidad de obtener una bola roja es mayor o menor si se juntan las bolas de las dos urnas en una sola y se extrae una única bola.

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1 Sean las matrices $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

a) Obtener la relación que deben verificar a, b y c para que se tenga la identidad $PQ = QP$.

b) Fijemos $b = 5$ y $c = 7$. Hallar el valor de a para que se tenga la propiedad $det(P-Q) = 0$.

Ejercicio 2 Se considera el plano $\pi \equiv 6x + 2y + 3z = 12$. Sean A, B y C los puntos de corte de π con los ejes coordenados y sea el punto $D(1, 0, 0)$. Calcular el volumen del tetraedro $ABCD$.

Ejercicio 3 Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x+1} - c\,\mathrm{e}^{2(x-1)} & \text{si } x \geq 1, \\ cx^2 + dx & \text{si } x < 1. \end{cases}$

a) Hallar la relación entre c y d para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Hallar c y d para que f sea derivable.

Ejercicio 4 Hallar el valor de la integral definida $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2x)\cos^2(2x)\,dx$.

Ejercicio 5 Se considera una baraja francesa de 54 cartas, cuatro palos con 13 cartas cada uno (del 1 al 10 más tres figuras), además de dos comodines. Un jugador tiene en su mano cuatro cartas del mismo palo, con números 4, 5, 6 y 7. Toma una carta del montón que queda.

a) Calcular la probabilidad de obtener una escalera de color (cinco cartas del mismo palo con numeración consecutiva), teniendo en cuenta que los comodines pueden tomar el valor que se desee.

b) Calcular la probabilidad de conseguir al menos una escalera normal (no todas las cartas necesariamente del mismo palo).